I1 & I2

Aufgabe I1 - Periheldrehung

I1

Masse der Sonne	1.989E+30
Lichtgeschwindigkeit	2.9979E+08
Gravitationskonstante	6.6732E-11
daraus R(S) des Sonne	2.9537E+03
1 AE	1.4960E+11

	a in AE	e	Formel p.134 unten	T	in 100 Jahren (rad)	in 100 Jahren (")
Merkur	3.8710E-01	0.205578	5.01923E-07	0.2408	0.00020844	42.994
Venus	7.2333E-01	0.00687	2.57271E-07	0.6152	4.1819E-05	8.626
Erde	1.0000E+00	0.016722	1.86132E-07	1.00001	1.86131E-05	3.839

Aufgabe I2 - Shapiro & Hipparcos

2*R(S)/D	3.9488E-08	rad	
	8.1449E-03	"	also 8.1 mas wie behauptet!

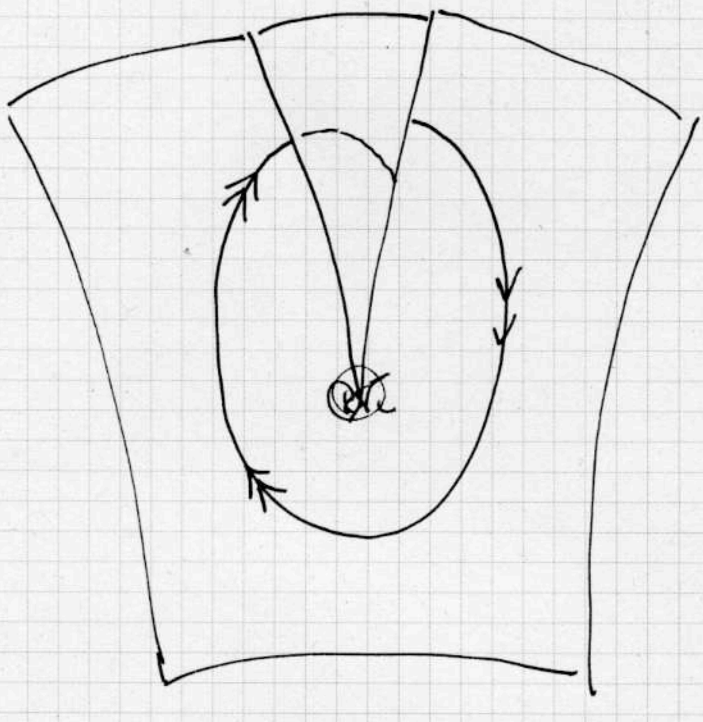
I2

I3

(Aufgabe von Epstein [10-217] !)

In der ART ist der Kreisumfang kleiner als der Durchmesser · π. Man schneidet daher aus der Ebene einen Spickel / Sektor raus und schiebt den Rest zu einem Kegel zusammen.

Andernfalls müsste man ein zusätzliches Stück einfügen:



Es kommt zu einer retrograden Rosette !

Auch die Ablenkung eines Lichtstrahls am Sonnenrand würde anders verlaufen.

Das Vorzeichen der Raumkrümmung nach ART ist damit experimentell gut bestätigt.

(ebenfalls unorthodoxe Umlaufrichtung. Von Epstein gewollt als kleine Provokation so gewählt ??)

I4 = <u>I10 - 4</u>

Wir brauchen nur das konventionelle Ergebnis (eine Länge in m) durch die Lichtgeschwindigkeit zu teilen :

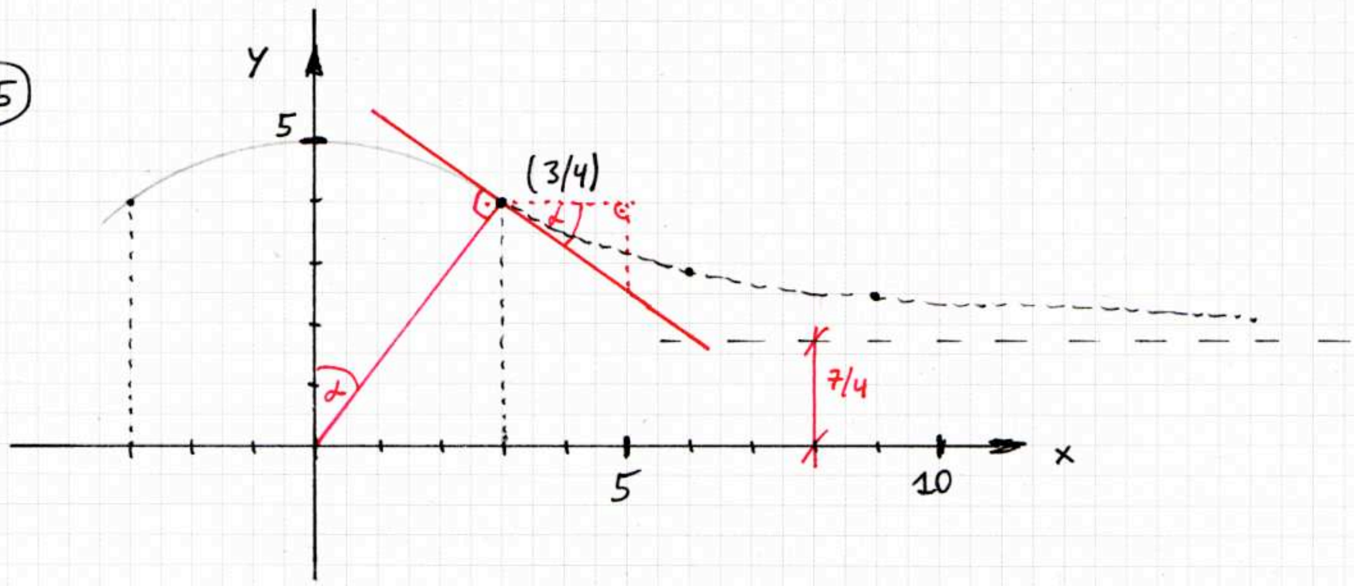
$$\alpha = \frac{G \cdot M}{c^2} \approx \frac{6.6732 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.99792 \cdot 10^{8})^{\cancel{2}\,3}} \approx 1476.8 \text{ m}$$

$\tilde{\alpha}$ in Lichtsekunden : $\frac{\alpha}{c} \approx 4.9262 \cdot 10^{-6}$ Ls

$$\tilde{\alpha} = \tilde{G} \cdot M \quad \Longrightarrow \quad \tilde{G} = \ldots$$

(siehe dazu auch K2 !!)

I5



$$f(x) = y = a + b/x \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad f(3) = 4 \\ &\text{II} \quad f'(3) = -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

also

$$\text{I} \qquad a + \frac{b}{3} = 4$$

$$\text{II} \qquad -\frac{b}{x^2}\Big|_{x=3} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{II} \Rightarrow \quad b = \frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{4}$$

eingesetzt in I $\qquad a = 4 - \frac{b}{3} = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$

Somit : $\quad \underline{f(x) = \frac{7}{4} + \frac{27}{4 \cdot x} = \frac{1}{4} \cdot \left(7 + 27/x\right)}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{7}{4} \quad ; \quad f(6) = \frac{7}{4} + \frac{9}{8} = \frac{14}{8} + \frac{9}{8} = \frac{23}{8}$$

$$f(9) = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$f(27) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

Eine Uhr, die stationär bei $x = 3$ liegt, macht für eine Periode Eigenzeit einen Weg von $4 \cdot 2\pi$ durch die Raumzeit.

Die Uhr in OFF legt dafür nur einen Weg von $\frac{7}{4} \cdot 2\pi$ zurück.

Die Uhr bei $x = 3$ tickt also um den Faktor $\frac{7/4}{4} = \frac{7}{16}$ langsamer als die Uhr in OFF.

Wir haben also eigentlich alles andere als ein 'schwaches Feld' !! Ein solches würde in dieser zusammengerollten Darstellung etwa aussehen wie ein dickes, gerades Rohr mit einer Schweissnaht ...

Aus $\delta t_r = \delta t_\infty \cdot \sqrt{1 - R_s/r}$ erhalten wir für $r = x = 3$

$$1 - \frac{R_s}{3} = \left(\frac{7}{16}\right)^2 \quad ; \quad R_s = 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{7}{16}\right)^2 \right] \approx 2.43 \; (!)$$

R_s ist also gar nicht so viel kleiner als $R = 3$.

Wir haben hier wirklich nicht den Fall eines schwachen Gravitationsfeldes, womit unsere näherungsweise Darstellung eigentlich hinfällig ist !

15 Blatt 2

~~[illegible]~~ I6

Die Photonen verlieren dabei zwar Energie, was sich in einer Rotverschiebung gemäss $E = h \cdot f$ bemerkbar macht (siehe I4), aber sie werden dabei für einen Beobachter im OFF <u>schneller</u> !!

Nach den Formeln auf p. 113 oben gilt

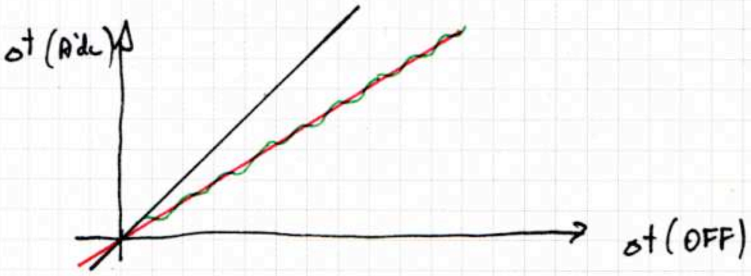
$$c(r,\infty) = c_0 \cdot \left(1 - \frac{2\alpha}{r}\right)$$

Mit wachsendem r nähert sich $c(r,\infty)$ immer mehr c_0 an.

<u>Lokal</u> wird $c(r,r)$ ja immer als c_0 gemessen!

~~[illegible]~~ I7

Zuerst: Warum muss man die Rotation der Erde nicht berücksichtigen? Sie addiert sich ebenso oft zur Bahngeschwindigkeit, wie sie sich subtrahiert. Der Effekt ist also etwa der folgende: !



Dann: ART und SRT bewirken eine Verlangsamung des Uhrenganges in A'dam gegenüber der Uhr eines Beobachters in OFF. Die Effekte verstärken hier einander.

① ART Sonne: $\Delta T(A'da) = \Delta t(OFF) \cdot \sqrt{1-\frac{R_S}{r}}$ ← Sonne

② ART Erde: $\Delta T(A'da) = \Delta t(OFF) \cdot \sqrt{1-\frac{R_S}{r_E}}$ ← Erde

③ SRT Erdbahn: $\Delta T(A'da) = \Delta t(OFF) \cdot \sqrt{1-\frac{v_E^2}{c^2}}$

$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$; Sonne: $2 \cdot 1476.8$ m , Erde: $8.874 \cdot 10^{-3}$ m

r = Abstand ; $r \approx 1$ AE , $r = r_E$

v^2 der Erde: $\frac{mv^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$; $v^2 = \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M}{1 AE}$

$\rightarrow v^2/c^2 \approx 9.858 \cdot 10^{-9}$

100 Jahre ≙ $315.5815 \cdot 10^{7}$ s ; $\sqrt{1-a^2} \approx 1 - \frac{1}{2}a^2 \dots$

Also:

$$\left.\begin{array}{ll} ① \; -\frac{1}{2}a^2 \cdot 100\,J & \approx -31.15\,s \\ ② \quad " & \approx -2.10\,s \\ ③ \quad " & \approx -15.56\,s \end{array}\right\} \text{total } \underline{-48.81\,s}$$

~~7/10/01~~ I8

In $15^h = 54'000\,s$ läuft ein Zeitunterschied von 5.7 ns auf.

Also $$54'000 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = 5.7 \cdot 10^{-9}$$

Mit der üblichen Näherung $$1 - \sqrt{1 - x^2} = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{x^6}{16} \dots\right) \approx \tfrac{1}{2}x^2$$

erhalten wir

$$54'000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = 5.7 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2 \cdot 5.7 \cdot 10^{-9}}{54'000} \approx 2.1111 \cdot 10^{-13}$$

$$\frac{v}{c} \approx 4.5947 \cdot 10^{-7}$$

Somit $$v \approx 4.5947 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{8} \approx 137.8\ m/s$$

$$\hat{=}\ \underline{\underline{496.2\ km/h}}$$

Das Flugzeug wurde so ausgewählt, dass es

- möglichst hoch fliegen darf
- möglichst lange am Stück oben bleiben kann
- möglichst <u>langsam</u> fliegen kann dabei

In diesem Experiment 'stört' ja der Velocity-Effekt nach SRT nur.

~~[illegible]~~ I9

Rebka und Pound haben eine 'Doppler-Shift' $\frac{\Delta f}{f}$ von $2.22 \cdot 10^{-15}$ gemessen! Welche Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger (hier: Strahlungsquelle und Absorber) entspricht dieser winzigen [illegible] Frequenzverschiebung?

Wir gehen aus von $f' = f \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ bei Annäherung.

$$\frac{f'-f}{f} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 = 2.22 \cdot 10^{-15}$$

$$\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 1 + 2.22 \cdot 10^{-15} \quad \Big|\; \ldots^2$$

$$\frac{c+v}{c-v} = 1 + 2 \cdot 2.22 \cdot 10^{-15} + \cancel{2.22^2 \cdot 10^{-30}} \quad !$$

$$\cancel{c} + v = (c-v) \cdot \left(1 + \cancel{4.44}\; 4.44 \cdot 10^{-15}\right) = \cancel{c} - v + (c-v) \cdot 4.44 \cdot 10^{-15}$$

$$2 \cdot v = c \cdot 4.44 \cdot 10^{-15} - v \cdot 4.44 \cdot 10^{-15}$$

$$v \cdot \left(2 + \cancel{4.44 \cdot 10^{-15}}\right) = c \cdot 4.44 \cdot 10^{-15} \qquad *)$$

$$\frac{v}{c} \approx 2.22 \cdot 10^{-15}$$

$$v \approx 2.22 \cdot 10^{-15} \cdot c \approx 6.66 \cdot 10^{-7}\ \frac{m}{s} \quad \Big|\; \cdot 3600$$

$$v \approx 0.002\,3976\ m/h$$

$$\underline{\underline{v \approx 2.3976\ mm/h}} \quad !!$$

*) also $\frac{v}{c} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f}$!! → Schnelle 2. Lösung!

~~[illegible]~~ I9 2. Lösung via Reihenentwicklung:

Wieder $f' = f \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ mit $x = \frac{v}{c}$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f'-f}{f} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \overset{!}{=} 2.22 \cdot 10^{-15}$$

Wir betrachten die Taylor-Reihe für den Wurzelterm (bei $x_0 = 0$):

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{16} \cdot x^6 + \dots$$

Da bei uns ja $x = \frac{v}{c}$ ausserordentlich klein ist, schneiden wir nach dem linearen Glied ab und schreiben:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \approx 1 + x - 1 \approx x \quad !!$$

Also haben wir $x = \frac{v}{c} \approx 2.22 \cdot 10^{-15}$

$$v = c \cdot 2.22 \cdot 10^{-15} \approx 6.66 \cdot 10^{-7} \text{ m/s} \quad \Big| \cdot 3600$$

$$v = 0.002'397'6 \text{ m/h}$$

$$v = 2.3976 \text{ mm/h} \quad !$$

I 10

a) 1 sideischer Tag = 86'164.09 s = 2 · T (Umlaufzeit)

(1) $\frac{mv^2}{r} = F_Z = F_N = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_E}{r}$

(2) $U = 2\pi \cdot r$ & $U = v \cdot T \Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

(1) & (2) $\Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_E}{r}$; $r^3 = \frac{G \cdot M_E \cdot T^2}{4\pi^2}$

Das ist Keplers III. Gesetz : $r^3 / T^2 =$ konst.

Setzt man Zahlen ein, so erhalten wir für den Bahnradius $r = r_S$ des Satelliten

$r_S \approx 26'565'982$ m $\approx 26'566$ km

Die Satelliten kreisen also etwa 20'000 km über der Erdoberfläche.

b) bis d)

Wir denken in einem Inertialsystem, in welchem die Erdachse die z-Achse ist und in welchem die Erde pro sideischem Tag genau 1x rotiert.

Wir haben die Satellitenuhren mit Uhren auf der rotierenden Erdoberfläche zu vergleichen und benutzen als Bindeglied eine gedachte Uhr in unserem Inertialsystem*! Welche Effekte treten auf?

*) die ~~starke~~ der üblichen Gravitation an der Erdoberfläche ausgesetzt ist!

Aequatoruhr auf rotierender Erde : Velocity-Effekt gemäss SRT

Satellitenuhr im Orbit : Velocity-Effekt gemäss SRT
Gravitationseffekt gemäss ART

I 10 ctd.

Für den Velocity-Effekt brauchen wir die Bahngeschwindigkeit in unserem Inertialsystem:

$$v(\text{Satellit}) = 2\pi \cdot r_S / T \approx \underline{3874.44 \ \mathrm{m/s}} = v_S$$

$$v(\text{Aequatorpunkt}) = (2 \cdot \pi \cdot r_E) / (2 \cdot T) \approx \underline{465.11 \ \mathrm{m/s}} = v_E$$

Beide Uhren (diejenige im Satelliten und diejenige am Erdäquator) gehen langsamer gegenüber unserer Inertialuhr gemäss dem bekannten Wurzelausdruck:

$$\frac{\Delta t_S}{\sqrt{1-\left(\frac{v_S}{c}\right)^2}} = \Delta t_{\text{Inert.}} = \frac{\Delta t_E}{\sqrt{1-\left(\frac{v_E}{c}\right)^2}}$$

Der Gravitationseffekt berechnet sich nach G4 wie folgt:

$$\frac{\Delta t_S - \Delta t_E}{\Delta t_E} \approx \frac{\cancel{\Delta t_\infty} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r_S}\right) - \cancel{\Delta t_\infty} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r_E}\right)}{\cancel{\Delta t_\infty} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r_E}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha / r_E - \alpha / r_S}{1 - \alpha / r_E} \approx \frac{\alpha}{r_E} - \frac{\alpha}{r_S} = \alpha \cdot \frac{r_S - r_E}{r_E \cdot r_S}$$

$$\frac{\alpha}{r_E} \approx 6.9 \cdot 10^{-10} \ !!$$

Was macht das aus in einem ganzen siderischen Tag?

$$\Delta T \text{ pro sid. Tag} \approx 86'164 \cdot \alpha \cdot \frac{r_S - r_E}{r_S \cdot r_E} \approx \underline{45'549 \ \mathrm{ns}} \ !$$

$$\left(\frac{86'164 \ \mathrm{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_E}{c}\right)^2}} \approx 86'164 \ \mathrm{s} + 104 \ \mathrm{ns} \ !! \right)$$

I 10 Ftd.

b) Damit können wir für einen Satelliten auf einer polaren Bahn die Bilanz ziehen:

ΔT (ART, Satellit) $\approx$ + 45'549 ns

ΔT (SRT, Satellit) $\approx$ − 7'186 ns $\left(\sqrt{} \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\ !\right)$

ΔT (SRT, Aequator) $\approx$ − 104 ns dito

Alle Differenzen beziehen sich auf die gedachte Uhr im Inertialsystem, als bis dort 1 sider. Tag abgelaufen ist!

Vergleichen wir die Satellitenuhren direkt mit der erdverbundenen Uhr am Aequator, so haben wir pro sider. Tag eine Differenz von

+45'549 − 7'186 + 104 = 38'467 ns

Solche Gangunterschiede sind für Atomuhren natürlich enorm und müssen korrigiert werden.

c), d) Betrachten wir nun einen Satelliten, der in der Aequatorebene umläuft, und zwar im gleichen Richtungssinn wie die Erde und unsere ortsfeste Uhr am Aequator.

Da sich die Satellitengeschwindigkeit nicht auf Punkte an der Erdoberfläche bezieht (ganz anders als die Geschwindigkeit der Flugzeuge bei Hafele & Keating in I5!), ändert sich an den Rechnungen oben gar nichts!!

In allen GPS-Satelliten kann also die Gangdifferenz mit genau denselben Faktor korrigiert werden:

38'467 ns pro sider. Tag oder

19'233.5 ns pro Umlauf