D1

klassisch : $v + w' = 1000 \,\frac{m}{s} + 1000 \,\frac{m}{s} = \underline{\underline{2000 \,m/s}}$

relativistisch : $v \oplus w' = \dfrac{1000 + 1000}{1 + \dfrac{1000 \cdot 1000}{3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^8}} = \dfrac{2000}{1 + \dfrac{10^6}{9 \cdot 10^{16}}}$

$$v \oplus w' = 2000 \Big/ \left(1 + \tfrac{1}{9} \cdot 10^{-10}\right) =$$

$$= 2000 \,/\, 1.000'000'000'011'1\overline{1}$$

$$\approx 1999.999'999'98 \;m/s$$

D2

Die Herleitung ist unnötig, weil wir die Rollen von Schwarz und Rot, also der ungestrichenen und der gestrichenen Werte vertauschen können, wenn wir v mit $-v$ vertauschen !!

Gegeben: $t = \left(t' + \frac{x'}{c} \cdot \frac{v}{c}\right) / \sqrt{\;}$ und $x = (x' + v \cdot t') / \sqrt{\;}$

Also: $x \cdot \sqrt{\;} = x' + v \cdot t'$ und $t \cdot \sqrt{\;} = t' + \frac{x' \cdot v}{c \cdot c}$

(1)

$$x' = x \cdot \sqrt{\;} - v \cdot t' = x \cdot \sqrt{\;} - v \cdot \left[t \cdot \sqrt{\;} - \frac{x' \cdot v}{c \cdot c}\right]$$

$$x' - x' \cdot \frac{v^2}{c^2} = (x - v \cdot t) \cdot \sqrt{\;}$$

$$x' \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (x - v \cdot t) \cdot \sqrt{\;}$$

$$x' = (x - v \cdot t) / \sqrt{\;} \qquad \square$$

(2)

$$t' = \left(t \cdot \sqrt{\;} - \frac{x' \cdot v}{c \cdot c}\right) = t \cdot \sqrt{\;} - \left[x \cdot \sqrt{\;} - v \cdot t'\right] \cdot \frac{v}{c^2} \;.$$

$$t' \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \left(t - \frac{x \cdot v}{c^2}\right) \cdot \sqrt{\;}$$

$$t' = \left(t - \frac{x \cdot v}{c \cdot c}\right) / \sqrt{\;} \qquad \square$$

D3

(1)
$$\tilde{t} = \frac{t' + \frac{x' \cdot v}{c \cdot c}}{\sqrt{}} = \frac{\frac{t - \frac{x \cdot v}{c \cdot c}}{\sqrt{}} + \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{}} \cdot \frac{v}{c \cdot c}}{\sqrt{}} =$$

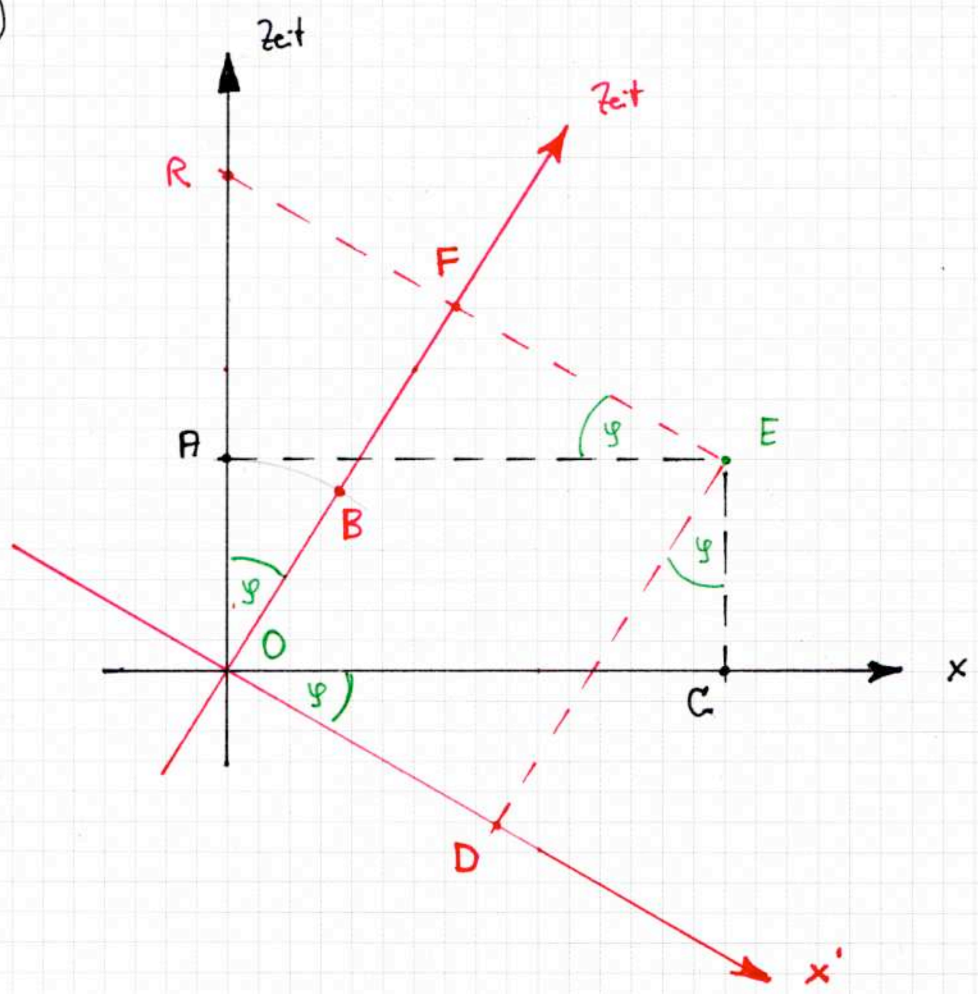
$$= \frac{t - \cancel{\frac{x \cdot v}{c \cdot c}} + \cancel{\frac{x \cdot v}{c \cdot c}} - t \cdot \frac{v \cdot v}{c \cdot c}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{t \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = t$$

(2)
$$\tilde{x} = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{}} = \frac{\frac{x - v \cdot t}{\sqrt{}} + v \cdot \left(\frac{t - \frac{x \cdot v}{c \cdot c}}{\sqrt{}} \right)}{\sqrt{}} =$$

$$= \frac{x - \cancel{v \cdot t} + \cancel{v \cdot t} - x \cdot \frac{v^2}{c^2}}{\left(\sqrt{}\right)^2} = \frac{x \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x$$

Die beiden Transformationen bilden also, hintereinander angewendet, tatsächlich die identische Abbildung.

D4



<u>Rot sagt</u>: Wenn die schwarze Uhr am Ort $x = C$ von Schwarz bei E die Zeit misst, haben Schwarz (und Rot) seit O die Strecke $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{CE}$ durch die Raumzeit zurückgelegt. Es ist also für E

$x = OC$, ~~$ct' = OA$~~ $c \cdot t' = \overline{OB} = OA = CE$, und

die Uhr in E misst $c \cdot t = OF$

Für mich findet E am Ort x' mit $x' = \overline{OD}$ statt.

Damit sind x, t, x' und t' im Diagramm festgelegt.

Wir rechnen nun mit $\sin \varphi = \frac{v}{c}$ und $\cos \varphi = \sqrt{1 - v^2/c^2}$:

(D4) Ad.

$x = \overline{OC}$, $t = \overline{OF}$, $x' = \overline{OD}$, $t' = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{CE}$

Es gilt: $c \cdot t' = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OR} - \overline{AR} =$

$= \overline{OF} / \cos\varphi - \overline{AE} \cdot \tan\varphi =$

$= c \cdot t / \sqrt{} - x \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} =$

$= c \cdot t / \sqrt{} - \left(x \cdot \frac{v}{c}\right) / \sqrt{} = \frac{c \cdot t - \frac{x \cdot v}{c}}{\sqrt{}}$

Division durch c : $t' = \frac{t - \frac{x \cdot v}{c \cdot c}}{\sqrt{}}$ $\square$

Weiter: $x' = \overline{OD} = \overline{FE} = \overline{RE} - \overline{RF} =$

$= \overline{AE} / \cos\varphi - \overline{OF} \cdot \tan\varphi =$

$= x / \sqrt{} - c \cdot t \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} =$

$= x / \sqrt{} - \left(c \cdot t \cdot \frac{v}{c}\right) / \sqrt{} =$

$= \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{}}$ $\square$

D5

a) $\frac{0.5+0.5}{1+0.5\cdot 0.5} = \frac{1}{1.25} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5} = \underline{0.8\cdot c}$

b) $\frac{0.5+0.8}{1+0.5\cdot 0.8} = \frac{1.3}{1.4} = \frac{13}{14} \approx \underline{0.928'571\cdot c}$

c) $\frac{0.5+1}{1+0.5\cdot 1} = \frac{1.5}{1.5} = 1 = \underline{\underline{c}}$

d) $\frac{1+0.8}{1+1\cdot 0.8} = \frac{1.8}{1.8} = 1 = \underline{c}$

e) $\frac{1+1}{1+1\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 = \underline{c}$

f) $\frac{1-0.5}{1+1\cdot(-0.5)} = \frac{0.5}{0.5} = 1 = \underline{c}$

g) $\frac{-0.5-1}{1+(-0.5)\cdot(-1)} = \frac{-1.5}{1.5} = -1 = \underline{-c}$

h) $\frac{0.8+0.8}{1+0.8\cdot 0.8} = \frac{1.6}{1.64} \approx \underline{0.975'610\cdot c}$

D6 & D7

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_Q^2 - \lambda_B^2}{\lambda_Q^2 + \lambda_B^2}$$

zu D6 :

$$\frac{v}{c} = \frac{656^2 - 649^2}{656^2 + 649^2} \approx 0.010'728$$

$v \approx 1.07\,\%$ von c

$v \approx 3218.3\ \mathrm{km/s}$

zu D7 :

$$\frac{v}{c} = \frac{620^2 - 520^2}{620^2 + 520^2} \approx 0.174'099$$

$v \approx 17.4\,\%$ von c

$v \approx 52'229.7\ \mathrm{km/s}$ (!)

D8

$$\lambda_B = \lambda_Q \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$ $v > 0$ bei Annäherung

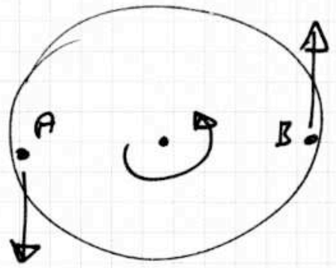
also $$\lambda_B = 632\ \text{nm} \cdot \sqrt{\frac{1 + 0.5}{1 - 0.5}} =$$

$$= 632\ \text{nm} \cdot \sqrt{\frac{1.5}{0.5}} =$$

$$= 632\ \text{nm} \cdot \sqrt{3} \approx \underline{1094.66\ \text{nm}}$$

Statt rot schon deutlich im Infraroten.

D9



Es sei noch vorausgesetzt, dass wir nicht gerade auf die Pole schauen!

Die Spektrallinie aus dem Bereich A sind blauverschoben, diejenigen aus dem Gebiet B sind etwas rotverschoben!

Insgesamt bewirkt das eine Verbreiterung der entsprechenden Linie um den Mittelwert, dessen Lage von v_{rad} abhängig ist.

D 10

Die Wirkung der hohen Temperatur ist klar: Eine hohe Temp. bedeutet hohe mittlere Teilchengeschwindigkeiten. Da diese Geschwindigkeiten ungeordnet in alle Richtungen zeigen, gibt es sowohl Doppler-Verschiebungen in die 'blaue' und in die 'rote' Richtung, insgesamt eine Verbreiterung der Spektrallinie.

Komplizierter ist die Wirkung eines hohen Drucks. Bei hohen Drücken kommt es viel häufiger zu Stössen zwischen den Teilchen, und dadurch <u>sinkt</u> die mittlere Verweilzeit im energetischen Grundzustand. Nach der Beziehung von Heisenberg

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar/2 = h/4\pi$$

wird mit abnehmendem Δt die natürliche Energieunschärfe ΔE, die sich in der 'natürlichen' Linienbreite äussert, grösser!

Viel stärker ist aber die störende Wirkung von eng benachbarten Teilchen auf die 'Bahnen' der Elektronen. Diese werden deformiert und in ihrer Energielage gestört / verschoben, was eine Verbreiterung der entsprechenden Spektrallinie bewirkt.

Ist der Druck extrem gross wie im <u>Innern</u> der Sterne, kommt es so oft zu Emission & Absorption und durch viele Störungen, dass sich im Gleichgewichtszustand ein kontinuierliches Spektrum entsteht, wie es von einem schwarzen Körper bei der entsprechenden Temperatur emittiert wird!

→ James B. Kaler, "Sterne und ihre Spektren", p. 64

D 11

1. Fall Quelle ruhend, Beobachter nähert sich mit v :

klassisch : $\lambda_B = \lambda_Q / \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

relativistisch : λ_Q verkürzt sich für den Beobachter mit den Uwalten !

$$\Rightarrow \quad \lambda_B = \lambda_Q \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c}} = \lambda_Q \cdot \frac{\sqrt{1-v/c} \cdot \cancel{\sqrt{1+v/c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}} \cdot \cancel{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}}$$

$$= \lambda_Q \cdot \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = \lambda_Q \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad \square$$

2. Fall Quelle nähert sich dem ruhenden Beobachter mit v :

λ' (im System der schnellen Quelle gemessen)

$$\lambda' = \lambda_0 - v \cdot T_0 = \lambda_0 - \frac{v}{f_0} = \lambda_0 - \frac{v}{c/\lambda_0} =$$

$$= \lambda_0 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad \text{klassisch}$$

Es ist dann relativistisch gerechnet

$$\lambda_B \cdot \sqrt{} = \lambda' = \lambda_Q \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\lambda_B = \lambda_Q \cdot \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}} \cdot \sqrt{1+\frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad \square$$

D 13

Für die Geschwindigkeit des mittleren Systems C muss gelten:

$$\boxed{\frac{x+x}{1+\frac{x\cdot x}{c\cdot c}} = v}$$

also

$$2x = v\cdot\left(1 + x^2/c^2\right) = v + v\cdot x^2/c^2 \quad \Big| \cdot \frac{c^2}{v}$$

$$\frac{2xc^2}{v} = c^2 + x^2 \quad ; \quad \text{etwas umgestellt}$$

$$\boxed{x^2 - \frac{2c^2}{v}\cdot x + c^2 = 0} \quad \text{Quadrat. Gleichung!}$$

Lösungsformel für quadrat. Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{2c^2}{v} \pm \sqrt{\frac{4c^4}{v^2} - 4c^2}}{2} = \frac{c^2}{v} \pm \sqrt{\frac{c^4}{v^2} - c^2}$$

$$= \frac{c^2}{v} \pm \frac{c^2}{v}\cdot\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{v}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Wegen $x\cdot v < c^2$ ist nur die Lösung mit dem Minus-Zeichen möglich!! Somit

$$x = \frac{c^2}{v}\cdot\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \quad \Big| \cdot v \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$x\cdot v\cdot\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = c^2\cdot\left(1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = v^2 \quad \Big| : v$$

$$x\cdot\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = v$$

oder

$$\boxed{x = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \approx \frac{v}{2} \quad \text{für } v \ll c \text{ !!}$$

D 13 ctd.

Die 'mittlere' Geschwindigkeit ist also ein bisschen grösser als $\frac{v}{2}$.

Für C bewegt sich A mit $-x$ nach links und B mit $+x$ nach rechts, aus der Sicht von C ist alles komplett symmetrisch.

Man kann kontrollieren, ob gilt $x \oplus x = v$ ...

D 14 (1. Blatt)

Ein relativistisches Auto nähert sich mit $v = 0.2 \cdot c$ einem Radar-Kasten, der ein Signal der Frequenz f_0 aussendet.

Das Auto empfängt in seinem System die Frequenz

$$f_A = f_0 \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_0 \cdot \sqrt{\frac{1.2}{0.8}} = f_0 \cdot \sqrt{1.5}$$

Das Auto reflektiert auch diese Frequenz, es strahlt als Spiegel wieder f_A ab.

Der Radarkasten empfängt vom schnellen Auto dann die Frequenz

$$f_R = f_A \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_0 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \sqrt{1.5} = f_0 \cdot 1.5$$

Es ist also $\boxed{\frac{f_R}{f_0} = \frac{c+v}{c-v}}$

$$f_R \cdot (c - v) = f_0 \cdot (c + v)$$

$$(f_R - f_0) \cdot c = (f_R + f_0) \cdot v$$

$$\boxed{v = c \cdot \frac{f_R - f_0}{f_R + f_0}}$$

Sei $v/c = \frac{30\ m/s}{3 \cdot 10^8\ m/s} = 10^{-7}$. Es müssen also Frequenzdifferenzen gemessen werden können, im Bereich $10^{-9} \cdot f_0$. Bei 1 GHz also $\Delta f \sim 1\ Hz$!!

B 14 2. Blatt

Eine Variante: Es wird kurz nacheinander 2x die Laufzeit des Signals hin & zurück gemessen!

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\cdot c\cdot \Delta t_1 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}\cdot c\cdot \Delta t_2$$

und daraus $$^{*}\; v = \frac{x_1 - x_2}{\Delta T}$$

wo ΔT der Zeitabstand der beiden Messungen ist.

Nachfrage bei der Polizei TG!

D7 – 14   3. Blatt

Gemäss telefon. Auskunft von Herrn Sager, Polizeikommando TG vom 21. Februar 2007 werden die folgende Methoden verwendet:

(1) 'klassische' Radarmethode mit Frequenzverschiebung à la Doppler

(2) Neuer: 5x hintereinander in Abstand von 1 ms eine Positionsmessung über die Laufzeit eines Laserpulses
(bei 108 km/h = 30 m/s bewegt sich ein Auto 3 mm / ms ...)

(3) Doppel-Lichtschranken in bekanntem Abstand (einige cm genügen)

(4) Ortsfeste Anlage mit 2 Induktionsspulen in bekannten Abstand, fest in der Fahrbahn eingebaut

(5) Via Fahrzeugerkennung (Nummernschild) zB. beim Eingang und Ausgang eines Autobahntunnels → $\bar{v}$ für die Tunnelstrecke.

Die eingesetzten Geräte werden vom eidg. Amt für Metrologie geprüft und zugelassen.
Website : www.metas.ch

(1) entspricht der Methode, an die in der Aufgabe gedacht wurde.